Agitation de fluides non newtoniens : quelques éléments de théorie à la disposition de l'ingénieur *

par H. Gibert

(Laboratoire de génie alimentaire, U.S.T.L., Montpellier.)

Durant ces dernières années, de nombreux progrès ont marqué nos connaissances en matière d'agitation et de mélange de fluides non newtoniens. On peut dire aujourd'hui que l'ingénieur, œuvrant dans cette spécialité, dispose d'un véritable arsenal de méthodes pour extrapoler les données acquises au laboratoire, pour évaluer les temps de mélange dans une cuve ou encore pour prévoir les puissances requises par l'agitateur.

Il est sans doute dommage que ces informations ne soient pas plus divulguées au niveau des ingénieurs de procédés, en particulier ceux qui travaillent dans l'industrie alimentaire. Dans ce secteur règnent encore trop souvent l'empirisme et la tradition.

Nous voudrions, ci-après, énoncer quelques bases simples susceptibles de guider les ingénieurs dans leur choix critique des mobiles d'agitation, en essayant d'apporter quelques informations pour les rendre aptes à évaluer leurs réelles performances. Nous nous intéresserons plus particulièrement ici au problème de la détermination de la puissance consommée par un agitateur et à celui du transfert de matière au niveau d'une particule immergée dans un fluide newtonien ou non.

1. Lois rhéologiques

En ce qui concerne la formulation des lois rhéologiques, il existe deux écoles, celle des mécaniciens des fluides, fondamentalistes qui cherchent à découvrir des relations justifiables par la théorie, au demeurant fort complexes, et celle des praticiens ingénieurs qui, faute de temps ou de moyens, désirent caractériser les fluides au moyen du nombre minimal de paramètre, quitte à perdre un peu de précision dans leur détermination.

Nous nous prononcerons en faveur des adeptes de la seconde école qui permet d'obtenir des relations utilisables dans la pratique, sans oublier que la finalité de la caractérisation d'un fluide non newtonien demeure l'exploitation des résultats.

Si l'on considère les liquides non newtoniens les plus simples, la loi puissance dite d'Ostwald De Waele, d'essence empirique, permet de représenter le comportement de ceux dont la contrainte de cisaillement, τ, ne dépend que du gradient de vitesse, pseudoplastiques ou dilatants. Lorsqu'il n'y a pas de seuil de contrainte ou encore lorsque ce dernier peut être considéré comme négligeable devant τ, cette relation s'écrit :

$$\tau = -b\left[\frac{dV}{dy}\right]^n \quad \text{avec} \quad \frac{dV}{dy} > 0 \qquad \text{(I)}$$

A la notion classique de viscosité dynamique μ, on substitue par conséquent deux paramètres b et n, b étant appelé, dans le langage

* *Conférence présentée aux Journées d'étude sur l'agitation mécanique, organisées par la S.C.I., à Toulouse, les 25 et 26 septembre 1980.*

des ingénieurs « agro-alimentaires », « consistance », et n « indice de comportement ».
La viscosité apparente, μ_a, se déduit de cette expression :

$$\mu_a = \frac{|\tau|}{|dV/dy|} = b\left[\frac{dV}{dy}\right]^{n-1} \qquad \text{(II)}$$

En première approximation, b est une fonction exponentielle de l'inverse de la température absolue, comme d'ailleurs la viscosité dynamique, alors que n est une grandeur pratiquement indépendante de la température (1).

2. Nombre de Reynolds de l'agitateur pour un fluide newtonien

Pour un fluide newtonien, il est bien connu que l'on caractérise l'écoulement d'un fluide dans une cuve par le nombre de Reynolds de l'agitateur, Re_a :

$$Re_a = \frac{D^2N\rho}{\mu} \qquad \text{(III)}$$

où N est la vitesse de rotation de l'agitateur, μ est la viscosité dynamique de la solution, ρ est la masse volumique de la solution et D, dimension caractéristique de l'agitateur, est souvent considéré comme étant le diamètre de l'agitateur. C'est en général impropre mais comment caractériser un mobile d'agitation au moyen d'un seul paramètre alors que de multiples dimensions interviennent comme la largeur et le diamètre des pales, leur épaisseur, leur nombre... ?

Heureusement, pour les agitateurs usuels, il existe des règles de normalisation qui tendent à préciser un certain nombre de rapports adimensionnels, ce qui permet dans la pratique, pour une même catégorie d'agitateurs, de ne fixer qu'une seule dimension.

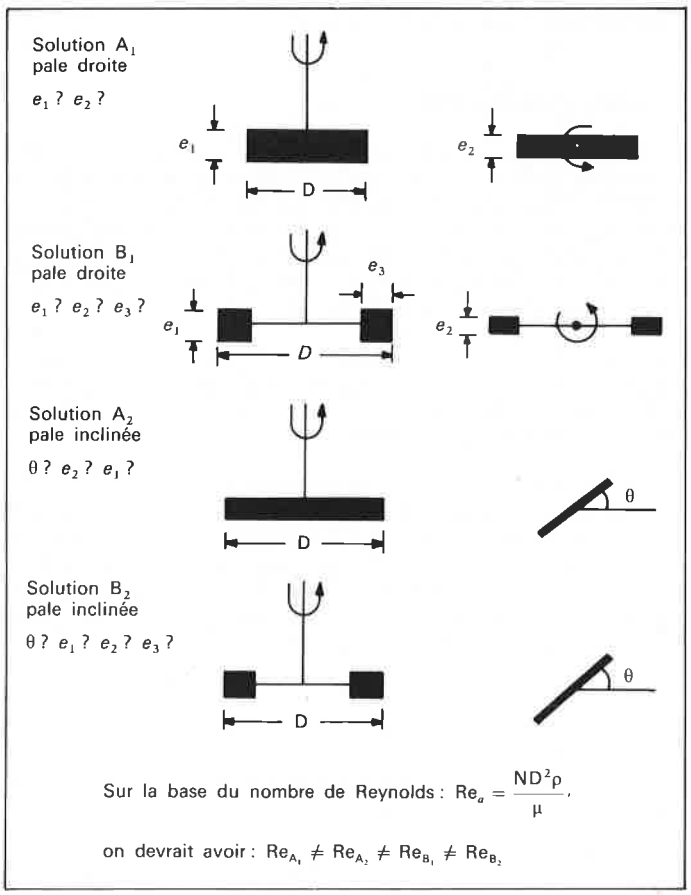

Figure 1. Examen d'un agitateur à pale unique.

Des recherches plus approfondies devraient, à notre sens, être conduites sur ce thème car, pour ne prendre que l'exemple simple de l'agitateur à pales droites, de multiples solutions sont possibles (figure 1) alors que le nombre de Reynolds est défini par la même équation. Il en résulte que les régimes hydrodynamiques induits par les agitateurs ne sont pas toujours les mêmes, à nombre de Reynolds donné. Ainsi, pour caractériser la fin d'obtention du régime laminaire, certains auteurs proposent-ils la valeur limite $Re_a = 10$, alors que d'autres préconisent des valeurs 10 fois supérieures sur la base de l'analyse des courbes de puissance. C'est bien la preuve que la dimension caractéristique de l'agitateur est mal choisie.

3. Nombre de Reynolds pour un fluide non newtonien

La définition la plus simple est donnée par l'équation IV :

$$Re_a^* = \frac{D^2N\rho}{(\mu_a)_m} \qquad \text{(IV)}$$

Pour utiliser ce nombre, la difficulté essentielle réside dans l'appréciation de la viscosité apparente moyenne $(\mu_a)_m$ à laquelle on peut faire correspondre, par le biais de l'équation II, un gradient moyen de vitesse $(dV/dy)_m$.
Pour résoudre en pratique ce problème on fait appel à l'analyse dimensionnelle du problème. Proposant : $Re_a^* = f(n, D, \rho, N, b)$, on obtient, sous la forme la plus générale :

$$Re_a^* = g(n)\frac{D^{2k}\rho^k N^{k(2-n)}}{b^k} \qquad \text{(V)}$$

k est un paramètre éventuellement fonction de n. Il prend la valeur unité, de même que la fonction indéterminée $g(n)$, pour $n = 1$. Par identification des équations IV et V, on obtient :

$$(\mu_a)_m = \frac{1}{g(n)} b^k D^{2(1-k)} N^{[1-k(2-n)]} \rho^{(1-k)} \qquad \text{(VI)}$$

Comme il est illogique de considérer que $(\mu_a)_m$ est, pour un fluide newtonien ou non newtonien, fonction de D, il en résulte que $k = 1$ et l'on a par conséquent :

$$(\mu_a)_m = \frac{b}{g(n)} N^{n-1} \qquad \text{avec } g(n) \to 1 \text{ quand } n \to 1 \qquad \text{(VII)}$$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)_m = \left[\frac{1}{g(n)}\right]^{\frac{1}{n-1}} . N = K(n).N \qquad \text{(VIII)}$$

La relation de proportionnalité entre le gradient de vitesse moyen et la vitesse de rotation N de l'agitateur est proposée par de nombreux auteurs. Seule diffère la forme de l'expression $K(n)$. Nous discuterons, ci-après, ce résultat :
- si, comme Beckner et Smith (2) l'ont proposé avec un agitateur à ancre :

$$K(n) = a(1 - n) \qquad \text{(IX)}$$

la fonction $g(n)$ devient $g(n) = [a(1 - n)]^{1-n}$.
La solution $g(n) \to 1$ pour $n \to 1$ est *a priori* possible, encore qu'il y a théoriquement indétermination. L'inconvénient majeur est que $K(n) = 0$ pour $n = 1$, ce qui signifie que, pour un fluide newtonien, il n'y a pas de lien entre le gradient de vitesse moyen et la vitesse de rotation. C'est improbable et nous reviendrons ultérieurement sur cette éventualité.
- pour la majorité des auteurs (3, 4), K est une constante indépendante de n. K est, au contraire, fonction de l'agitateur, et probablement aussi de sa position par rapport à la paroi. Elle est susceptible d'être déterminée expérimentalement à partir de la corrélation donnant la puissance requise par l'agitateur, sur la base de l'obtention d'une fonction unique.

Ce résultat revient à poser :

$$g(n) = K^{1-n} \quad \text{(X)}$$

ou

$$\boxed{Re_a^* = K^{1-n}\frac{D^2\rho N^{2-n}}{b}} \quad \text{(XI)}$$

4. Puissance requise pour l'agitation d'un fluide non newtonien

Pour un fluide newtonien, on sait qu'en absence de vortex, la puissance P requise par l'agitateur peut être calculée au moyen d'une corrélation entre deux nombres adimensionnels :

- le nombre de puissance $Pu = \dfrac{P}{N^3D^5\rho}$ (XII)
- le nombre de Reynolds de l'agitateur Re_a.

Proposons-nous de découvrir en régime laminaire la forme générale de cette corrélation.
La contrainte de cisaillement moyenne τ_m qui s'exerce sur les pales, c'est-à-dire le rapport de la force F engendrée sur la surface A du mobile, s'écrit en régime laminaire :

$$|\tau_m| = \left|\frac{F}{A}\right| = b\left[\frac{dV}{dy}\right]_m^n \quad \text{(XIII)}$$

soit en introduisant l'équation VIII :

$$\frac{F}{A} = b\left[\frac{1}{g(n)}\right]^{\frac{n}{n-1}} N^n \quad \text{(XIV)}$$

La puissance correspondante pour entraîner l'agitateur est proportionnelle à F et à la vitesse de l'agitateur soit, si D désigne la dimension caractéristique :

$$P \div FND \quad \text{(XV)}$$

Comme, pour un agitateur donné, A est proportionnel à D^2 :

$$P \div bD^3\left[\frac{1}{g(n)}\right]^{\frac{n}{n-1}} . N^{n+1} \quad \text{(XVI)}$$

soit : $$\frac{P}{N^3D^5\rho} \div \frac{1}{[g(n)]^{1/n-1}}\frac{1}{\left[g(n)\dfrac{D^2\rho N^{2-n}}{b}\right]}$$

$$Pu \div \frac{1}{[g(n)]^{1/n-1}} . \frac{1}{Re_a^*} \quad \text{(XVII)}$$

Si l'on choisit pour expression $g(n)$:

$$g(n) = [a(1-n)]^{1-n} \Rightarrow Pu \div \frac{a(1-n)}{Re_a^*} \quad \text{(XVIII)}$$

$$g(n) = K^{1-n}\,(\text{K constante}) \Rightarrow Pu \div \frac{K}{Re_a^*} \quad \text{(XIX)}$$

L'expression (XVIII) indique que, pour un fluide newtonien, le nombre de puissance ne serait pas inversement proportionnel au nombre de Reynolds, ce qu'infirme l'expérience. Nous n'adhèrerons pas, par conséquent, à la proposition de Beckner et Smith (2).

En revanche, l'équation (XIX) s'avère générale quelle que soit la nature du fluide. De l'identification du graphe de la fonction relative à un fluide newtonien, à celle d'un fluide non newtonien, on peut obtenir, comme Calderbank et al. l'ont proposé (3), la valeur de la constante K.

Il est ici intéressant de souligner l'analogie de comportement, en régime laminaire, entre le nombre de puissance mesuré dans une cuve et le coefficient de friction (ou facteur de Fanning) dans une conduite cylindrique.

5. Transfert de matière au niveau d'une particule immergée dans un fluide non newtonien

Par analyse dimensionnelle, le nombre de Reynolds relatif à une sphère de diamètre d immergée dans un fluide dont la vitesse d'attaque est V, s'écrit sous sa forme la plus générale :

$$Re_p^* = f(n)\frac{d^{kn}V^{(2-n)k}\rho^k}{b^k} \quad \text{(XX)}$$

avec $k = 1$ pour $n = 1$ et $f(n) \to 1$ quand $n \to 1$.

Si l'on fait référence au nombre de Reynolds classique avec le concept de viscosité apparente, μ_a, au point de mesure :

$$Re_p = \frac{dV\rho}{\mu_a}$$

On obtient pour expression générale de μ_a :

$$\mu_a = \frac{1}{f(n)}d^{(1-kn)}V^{[1-(2-n)k]}\rho^{(1-k)}b^k \quad \text{(XXI)}$$

Que le fluide soit newtonien ou non, μ_a ne peut être raisonnablement fonction du diamètre de la sphère, du moins lorsqu'elle est petite; par conséquent $k = 1/n$, et :

$$Re_p^* = f(n)\frac{dV^{\frac{2-n}{n}}\rho^{1/n}}{b^{1/n}} \quad \text{(XXII)}$$

$$\mu_a = \frac{1}{f(n)}b^{1/n}\rho^{\left(1-\frac{1}{n}\right)}V^{2\left(1-\frac{1}{n}\right)} \quad \text{(XXIII)}$$

Pour caractériser les propriétés physiques du fluide en mouvement vis-à-vis des transferts de matière, on utilisera le concept du nombre de Schmidt généralisé, Sc^* :

$$Sc^* = \frac{\mu_a}{\rho\Delta} = \frac{V^2}{f(n).\Delta}\left(\frac{b}{\rho V^2}\right)^{1/n} \quad \text{(XXIV)}$$

où Δ désigne la diffusivité.

L'expression générale de transfert, transcrite sous forme d'une loi puissance, s'écrit :

$$Sh = B(Re_p^*)^{a_1}(Sc^*)^{a_2} \quad \text{(XXV)}$$

Sh est le nombre de Sherwood hd/Δ, h étant le coefficient de transfert de matière, a_1 et a_2 sont des exposants qui s'avèrent expérimentalement indépendants de n et respectivement égaux à 1/2 et 1/3 (4).

Si le choix de la fonction $f(n)$ n'a pas été judicieusement effectué, la constante de proportionnalité, ici B, peut dépendre de n. Pour s'en convaincre, il suffit de tronquer arbitrairement l'expression de définition de Re_p^* en séparant $f(n)$:

$$Re_p^* = Re_p'^* . f(n)$$

Il vient en reportant les termes homologues dans l'équation (XXV) :

$$Sh = B[f(n)]^{1/6}(Re'^*)^{1/2}(Sc'^*)^{1/3} \quad \text{(XXVI)}$$

et en dépit de la faible variation du terme $B[f(n)]^{1/6}$ en fonction de n, cette grandeur n'est pas constante et diffère de la valeur de B correspondant au fluide newtonien.

Conclusion

Au terme de cette analyse, on peut conclure que le nombre de Reynolds de l'agitateur s'exprime sous la forme :

$$Re_a^* = K^{(1-n)} \frac{D^2 \rho N^{2-n}}{b}$$

où K est une constante caractéristique de l'agitateur.

Le nombre de puissance de l'agitateur s'avère inversement proportionnel au nombre de Reynolds, la constante de proportionnalité étant identique pour un fluide newtonien ou non newtonien.

La corrélation donnant l'intensité de transfert de matière au niveau d'une particule sphérique s'avère également la même que le fluide soit ou non newtonien.

$$Sh = B(Re_p^*)^{1/2} . (Sc^*)^{1/3}$$

$$\text{avec } Re_p^* = f(n) \left[\frac{d V^{\frac{2-n}{n}} \rho^{1/n}}{b^{1/n}} \right]$$

$$\text{et } Sc^* = \frac{1}{f(n)} \left[\frac{b^{1/n}}{V^{2[(1/n)-1]} \rho^{1/n} \Delta} \right]$$

$f(n)$ est ici une fonction indéterminée.

Nomenclature

a : Constante dans l'équation (XXV).
A : Surface de l'agitateur.
b : Consistance (cf. équation I).
B : Constante de proportionnalité (cf. équation XVII).
d : Diamètre de la sphère.
D : Dimension caractéristique de l'agitateur (souvent prise égale au diamètre).
e : Épaisseur des pales de l'agitateur.
$f(n)$: Fonction de l'indice n, a priori indéfinie.
F : Force exercée sur les pales de l'agitateur.
$g(n)$: Fonction de l'indice n, a priori indéfinie.
h : Coefficient de transfert de matière.
k : Constante a priori arbitraire (cf. équation V ou XX).
K : Constante de proportionnalité entre le gradient de vitesse moyen $(dV/dy)_m$ et la vitesse de rotation N (définition équation VIII).
n : Indice de comportement (cf. équation I).
N : Vitesse de rotation de l'agitateur.
P : Puissance d'agitation.
V : Vitesse.
y : Distance.

Lettres grecques

ρ : Masse volumique du fluide.
μ : Viscosité dynamique du fluide.
μ_a : Viscosité apparente (définie par équation II).
τ : Contrainte de cisaillement.
Δ : Diffusivité de matière.

Nombres de similitude

Pu : Nombre de puissance $\left(Pu = \frac{P}{\rho N^3 D^5}\right)$.
Re : Nombre de Reynolds (indice a : agitateur; indice p : particule; astérisque * : concept généralisé).
Sc : Nombre de Schmidt ($Sc = \mu/\rho\Delta$).
Sh : Nombre de Sherwood ($Sh = hd/\Delta$).

Bibliographie

(1) H. Gibert, C. Satayaprasert, « Agitation avec un dispositif à ancre d'un fluide pseudoplastique dans une cuve ». Congrès Soc. Chimie Industrielle, I.G.C. Toulouse (Septembre 1980).
(2) J. L. Beckner, J. M. Smith, *Trans. Inst. Ch. E. London*, 1966, **44**, 224.
(3) P. H. Calderbank, M. B. Moo-Young, *Trans. Inst. Ch. E. London*, 1961, **39**, 337.
(4) C. Satayaprasert, Thèse de Docteur ingénieur, U.S.T.L. Montpellier (Septembre 1980).

Stereospecificity in Organic Chemistry and Enzymology

Volume 13 of Monographs in Modern Chemistry. 1981. Approximately. VIII, 288 pages. Hardcover. Approximately DM 148.–.

Enzymes are unsurpassed as stereospecific agents. Despite all efforts, though, the causes of this invaluable property are still not completely understood.
On the other hand, advances during the last two decades in synthetic organic chemistry and in the elucidation of reaction mechanisms have been such that it is now possible and timely to review our knowledge about the relations between enzymatic stereospecificity and enzymatic reaction mechanisms. This is the central theme of this book. It highlights the most important and intellectually most challenging achievements and thereby provides a basis from which a deeper insight can be gained into the nature of enzymatic catalysis. Eventually, this should lead to a broader application of Nature's know-how for improving the efficieny of non-enzymatic processes.
The authors have made a particular effort to avoid the sloppy language that unfortunately prevails in today's literature. They offer clear definitions and use a consistent nomenclature so that the book – as a sideeffect – helps the reader to clarify concepts that are related to stereochemistry.

verlag chemie

P.O. Box 1260/1280
D-6940 Weinheim
Federal Republic of Germany