

Les racines grecques des travaux de Bravais

Alain Sevin et Christine Dezarnaud Dandine [1]

« Dis-moi donc : est-ce qu'apprendre n'est pas devenir plus sage relativement à ce qu'on apprend ? », Platon [2].

C'est en 1849 qu'Auguste Bravais (1811-1863) publie les premiers travaux qui vont aboutir à la caractérisation des réseaux cristallins [3]. Jusqu'alors, il s'était plutôt livré à l'observation géologique et à l'analyse des phénomènes météorologiques. Le thème qu'il aborde peut alors apparaître comme un exercice formel, destiné à prouver à ses collègues de l'École polytechnique ses éminentes qualités de mathématicien. Le problème posé est le suivant : sous quelles conditions peut-on remplir l'espace à l'aide de solides identiques, assemblés par des translations, de manière à engendrer un espace compact ? Cet espace présente alors nécessairement des périodicités qui doivent être constantes dans toute direction donnée ; il suffit pour s'en convaincre d'examiner n'importe quel carrelage régulier. Une autre importante conséquence de la contrainte d'homogénéité est que le remplissage ne doit pas laisser de vide entre deux solides adjacents. Notons que, dès cette époque, les notions d'atome et de molécule sont couramment utilisées. En 1848, Pasteur a démontré l'existence de la chiralité de certains cristaux de tartrates à partir de la structure des molécules organiques qui les composent. La notion de maille cristallographique est évidemment sous-jacente ; toutefois, Bravais ne dispose pas d'éléments lui permettant d'établir une relation entre la structure locale des atomes ou molécules composant la cellule de base et sa forme spatiale. Cela ne sera effectué qu'un demi-siècle plus tard, avec les travaux de von Laue sur la diffraction des rayons X, en 1912.

C'est à partir d'hypothèses purement géométriques que Bravais établit dans un premier temps qu'il n'est possible de paver un plan à l'aide de motifs identiques, sans laisser de parties vides, qu'à l'aide de certains polygones réguliers. S'appuyant sur ces surfaces, il démontre alors que l'on peut

remplir l'espace de façon homogène à l'aide des quatorze types de réseaux qui depuis portent son nom. Il n'est pas dans notre perspective d'aborder en détail cette démonstration ; nous nous proposons toutefois de montrer que cette problématique possède des racines très anciennes et qu'elle fut abordée par les philosophes et mathématiciens grecs dès le V^e siècle avant notre ère. Au cours de cette brève incursion dans l'histoire de la physique naissante, nous verrons que les conditions de travail posées par Bravais faisaient déjà l'objet de controverses à une époque beaucoup plus ancienne. Notons également qu'au fil des siècles, le problème du remplissage du plan et de l'espace a été abordé et résolu de façon empirique par les architectes et les carreleurs sans que, pour autant, des données de nature théorique en émergent.

Le cadre présocratique

La naissance de l'étude et la description de la nature (*physis*) à l'aide de théories basées sur des arguments rationnels remontent aux philosophes présocratiques. Il est possible de distinguer trois grands courants qui vont irriguer toute l'histoire de la science :

- *Les pythagoriciens* : apparus entre 590 et 550 av. J.-C., ils professent que la connaissance de la nature s'appuie sur les harmonies déduites des propriétés de certains nombres entiers. Les disciples attribuent à Pythagore lui-même la découverte des cinq solides parfaits dont les faces sont constituées par des polygones réguliers identiques : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.
- *Les élementalistes* : un apport décisif, qui va dominer l'histoire de la physique pendant des siècles, est attribué à Empédocle (voir *encadré 2*), qui énonce que tout ce qui apparaît dans le monde sublunaire que nous habitons, soumis

Encadré 1

Auguste Bravais : gentleman globe-trotter et mathématicien [9]

Sa carrière scientifique est placée sous l'égide de l'École polytechnique. Brillant élève, il y entre à 18 ans. À sa sortie, il choisit la marine et participe à des expéditions d'observations scientifiques. Ses sujets d'intérêt sont d'une surprenante variété, allant de la botanique à la géologie et à la météorologie. En parallèle à ces travaux appliqués, il publie régulièrement de courts essais de physique et de mathématiques appliquées. En 1845, il est nommé professeur de physique à l'École polytechnique. En 1849, il participe à la première expédition scientifique menée au sommet du mont Blanc. Inspiré par les travaux de Haüy sur la morphologie des cristaux, il aborde alors le problème fondamental des réseaux cristallins. Ses travaux sont reçus avec succès par ses collègues de l'Académie des sciences. Hélas, à partir de 1850, ses facultés déclinent rapidement et il abandonne de fait la vie scientifique. Il meurt en 1863, sans connaître l'immense postérité de ses travaux.



Buste d'Auguste Bravais (mairie d'Annonay, sa ville natale).

Encadré 2**Empédocle, l'homme aux semelles de bronze**

« [...] à la fin d'un banquet...] Hippobote raconte qu'Empédocle se leva de table et s'en alla dans la direction de l'Etna, semble-t-il, et qu'étant arrivé là, il se jeta au milieu du feu et disparut, voulant affirmer la réputation qu'il avait d'être un dieu. La chose fut connue par la suite, car une de ses sandales fut rejetée par le volcan, intacte ; il portait en effet par habitude des sandales de bronze. Pausanias a fortement protesté contre l'inexactitude de cette histoire » [10].

au devenir, résulte des combinaisons changeantes de quatre éléments : l'eau, l'air, le feu et la terre.

- **Les atomistes** : à côté des deux courants de pensées précédents, largement dominants, les atomistes, à la suite de Démocrite (vers 460-370 av. J.-C.) et Leucippe, professent que la matière est discontinue. Pour eux, elle est constituée par des atomes, particules infimes, insécables, en nombre infini, qui se composent ou se délitent au gré de chocs aléatoires dans le vide. Il est clair qu'une aporie en résulte : comment expliquer dans ces conditions l'existence de formes stables, reproductibles ? La réponse est que ces formes sont gérées par la nécessité, ce qui parut et paraît toujours un argument *ad hoc* qui sera toujours opposé à l'atomisme, en dépit des efforts futurs d'Épicure et Lucrèce.



Platon et Aristote, détail de *L'École d'Athènes* de Raphaël (1512, Palais du Vatican).

Les frères ennemis : Platon et Aristote**La synthèse platonicienne**

L'importance considérable de Platon (427-347 av. J.-C.) dans l'histoire des sciences tient au fait que, le premier, il propose une véritable géométrisation de la nature. Il convient de rappeler le célèbre adage qu'il aurait inscrit à l'entrée de son Académie : « *Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre* ». Dans le cadre de sa théorie des idées, il reprend les thèses pythagoriciennes et effectue une véritable synthèse avec les théories d'Empédocle en attribuant aux

quatre éléments des polyèdres parfaits [4] selon la séquence : feu (tétraèdre), air (octaèdre), eau (icosaèdre), terre (cube) (figure 1). Le dodécaèdre, qui se trouve le plus proche de la perfection de la sphère, est attribué à la totalité de l'univers. On ne peut pas vraiment parler d'atomisme à son sujet bien que ses polyèdres-éléments incitent à le penser. Ce modèle est dynamique : l'eau, le feu et l'air dont les polyèdres possèdent des faces se composant à partir d'un demi-triangle équilatéral peuvent se combiner par échange de ces derniers. La terre-cube ne peut s'échanger avec les trois autres éléments car ses faces se ramènent à un demi-triangle rectangle isocèle différent des précédents.

La matière qui peuple notre monde sublunaire est régie par les propriétés et les échanges des éléments géométriques. À l'opposé, le monde « supralunaire », hors d'atteinte, parfait, sphérique, immuable, est le domaine des idées et il ne participe pas au devenir de notre monde.

Encadré 3**Aristote, métèque et dandy**

Aristote, né à Stagire, dans le royaume de Macédoine, n'était pas citoyen athénien. Il avait le statut de métèque, c'est-à-dire d'étranger jouissant de droits particuliers. Ce fut un dandy, comme de nombreux philosophes contemporains. Voici ce qu'en dit Claude Élien : « *On dit que le premier différend d'Aristote avec Platon fut motivé par les faits suivants. Platon n'aimait pas le mode de vie ni la mise d'Aristote. Celui-ci en effet s'habillait et se chaussait de manière raffinée, portait les cheveux courts, ce qui paraissait bizarre à Platon, et, de surcroît, il se pavanait, de nombreuses bagues aux doigts. Son visage avait une expression moqueuse, et son bavardage inopportun n'était pas à son avantage. Il va de soi que tous ces traits ne conviennent nullement à un philosophe* » [11].

La physique d'Aristote

Bien qu'ayant été pendant trente ans l'élève de Platon, Aristote (384-322 av. J.-C.) s'oppose à l'ensemble de ses thèses. Sa philosophie et ses théories relatives à la nature vont dominer l'histoire des sciences pendant près de vingt siècles. Il s'oppose radicalement à la théorie des idées, et en particulier aux éléments-polyèdres, en utilisant un argument qui lui semble de bon sens, lié à la masse des différentes sortes de matière : une figure idéale n'a pas de masse ; pour en avoir, il faut la remplir. Avec quoi ? D'autres polyèdres ? Il en donne une démonstration par l'absurde : « *Or, si le point ne possède aucun poids, il est clair que les lignes n'en auront pas non plus, et si ces dernières n'en ont pas, les surfaces n'en auront pas davantage. Par conséquent aucun corps n'a de poids* » [5].

Il reprend cependant à son compte la théorie des quatre éléments en lui ajoutant quatre qualités, opposées deux à deux : chaud/froid, sec/humide. Cette approche va dominer et en grande partie stériliser la physique pendant près de vingt siècles. La physique moderne s'édifiera en critiquant Aristote de manière radicale, et il faudra attendre Galilée et Descartes pour rejeter définitivement ses théories.

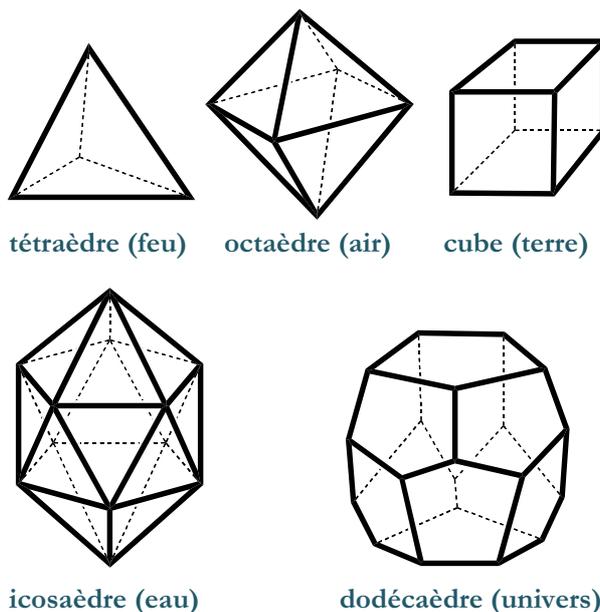


Figure 1 - Cinq solides parfaits liés à quatre éléments.

Et la cristallographie ? Nous y venons après avoir précisé le cadre général où s'exercent les arguments d'Aristote. Dans sa *Physique* et sa *Métaphysique*, il s'oppose aux atomistes à l'aide de deux arguments qui lui semblent réducteurs :

- Le vide, assimilé au non-être, n'est pas : « *De ce qui précède, on voit qu'il n'existe pas de vide ni séparé (soit absolument, soit dans le rare), ni en puissance, à moins que l'on ne veuille, à toute force, appeler vide la cause du transport* » [6].
- La matière est continue, divisible à l'infini : « *En outre, affirmer l'existence des atomes, c'est entrer nécessairement en conflit avec les sciences mathématiques* » [7].

En effet, une ligne est engendrée par des points sans surface et il est possible de la découper un nombre infini de fois. Mais, ce qui à ses yeux ruine la théorie de Platon est que, si la matière était constituée par des polyèdres réguliers, de quelque nature que ce soit, leurs assemblages laisseraient des vides entre eux : « *D'une manière générale, la tentative d'attribuer une figure à chacun des corps simples est irrationnelle, et d'abord, parce qu'on n'arrivera pas à combler la totalité du lieu. On admet généralement, en effet, que dans les surfaces, il n'y a que trois figures pour remplir un lieu, le triangle, le carré et l'hexagone, et, dans les solides, deux seulement, la pyramide et le cube. [...] Ainsi, la figure de l'élément ne peut pas persister, car, autrement, la masse totale ne serait pas en contact sur tous ses points avec le corps qui l'enveloppe* » [8].

Il est bien clair qu'Aristote aborde un problème très voisin de celui de Bravais, de manière certes incomplète, mais toutefois pertinente. Il part du pavage d'une surface pour, s'appuyant sur ses motifs, remplir tout l'espace. À l'exception du cube (la terre), les autres éléments-polyèdres de Platon ne peuvent combler l'espace de manière homogène, sans laisser de vides.

Conclusion

Notre très rapide survol des grandes philosophies grecques qui vont marquer l'histoire de la science nous montre que, dès les origines, le problème de la nature de la matière est clairement posé sur la base d'arguments rationnels. Nous voyons que les différents points de vue proposés, en

apparence irréductibles, contiennent des idées qui seront reprises pas la suite : géométrisation de la nature, théorie atomiste, remplissage de l'espace. Il faudra attendre le XIX^e siècle pour qu'une grande partie de ces interrogations trouvent une réponse. Il devient alors clair que Bravais, par ses travaux, vint résoudre un des dilemmes qu'Aristote avait clairement posés.

Notes et références

- [1] Cet article est inspiré de deux ouvrages des auteurs : *Symétrie m'était contée* (Ellipses, 2007) et *Histoire des polyèdres* (Vuibert, 2009), illustrés par PIEM.
- [2] Platon, *Théétète*, traduction et notes par E. Chambry, Garnier-Flammarion, 1993, 145b-145d, p. 62-63. Le mathématicien Théétète était contemporain de Platon.
- [3] Bravais A., Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1849, 14, p. 141.
- [4] Appelés depuis « polyèdres platoniciens ».
- [5] Aristote, *Traité du Ciel*, traduction et notes de J. Tricot, Vrin, 1998, III, 1(25), p. 123.
- [6] Aristote, *Physique Tome premier*, texte établi et traduit par H. Carteron, Les Belles Lettres, 1983, *Physique IV*, 217 b, p. 146.
- [7] *Ibid.* [5], III, 4(20), p. 137.
- [8] *Ibid.* [5], III, 8(5-10), p. 151.
- [9] Ces éléments biographiques s'inspirent d'une notice lue à l'Institut par H. Poincaré, et d'un article de M. Rouché, publié dans le *Livre du Centenaire de l'École polytechnique*, 1897. Voir le site de Sabix (Société des amis de la bibliothèque de l'École polytechnique) : www.sabix.org.
- [10] Laërce D., *Vie, doctrines et sentences des philosophes illustres*, traduction R. Genaille, Garnier-Flammarion, 1965, *Tome II*, p. 149.
- [11] Élien C. (vers 170-230), *Histoire variée*, Livre 3, La roue à livres, Les Belles Lettres, 2004, p. 42.



A. Sevin

Alain Sevin est directeur de recherche émérite au CNRS et Christine Dezarnaud Dandine, est enseignante-chercheur à l'UPMC, au Laboratoire de Chimie Théorique, UPMC-Sorbonne Universités*.



C. Dezarnaud Dandine

* Laboratoire de Chimie Théorique, UMR 7616 CNRS/UPMC-Sorbonne Universités, Barre 12-13, 4^e étage, CC 137, 4 place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05.
Courriels : sevin@lct.jussieu.fr ; cdd@lct.jussieu.fr

Les Fondamentales 2014 du CNRS

Deux jours pour répondre à la question : « Que reste-t-il à découvrir ? »

La seconde édition* du forum « Les Fondamentales », organisé par le CNRS dans le cadre de la Fête de la science, en collaboration avec l'Université de Grenoble et en association avec le journal *Le Monde*, se tiendra les 10 et 11 octobre prochain à Grenoble, sur le campus de Saint-Martin-d'Hères.

Au programme :

- Les 10'Chrono (une nouveauté cette année) : trois conférences de dix minutes chacune pour aborder un même thème sous différents angles (science et patrimoine, musique, valorisation des déchets, forêt amazonienne...).
- Les débats « En perspective » : deux points de vue complémentaires pour comprendre les défis scientifiques et technologiques de demain (l'épigénétique, le climat ou l'origine des comètes en lien avec la sonde Rosetta).
- Les forums « Que reste-t-il à découvrir ? » : lieux de rencontre des chercheurs de différentes disciplines, ces espaces de discussion libre alternent interviews, débats et questions du public aborderont des thèmes variés (la mémoire, les matériaux innovants, la biologie de synthèse).
- La Master Classe (10 oct.) : rencontre avec des personnalités du monde de la recherche et du monde économique et politique, orchestrée par Alain Fuchs, président du CNRS.

Les Fondamentales : un rendez-vous incontournable de culture scientifique.

• <http://lesfondamentales.cnrs.fr>

* Les Fondamentales en 2013 à Paris, c'était plus de 9 500 inscrits, 35 débats, 115 chercheurs intervenants.